数と式

数の分類

$$
\text{数（複素数）}\ a+bi
\begin{cases}
\text{実数}(b=0)
\begin{cases}
\text{有理数}
\begin{cases}
\text{整数}
\begin{cases}
\text{正の整数（自然数）}
\begin{cases}
1 \\
\text{素数} \\
\text{合成数}
\end{cases} \\
0 \\
\text{負の整数}
\end{cases} \\
\text{分数}
\end{cases} \\
\text{無理数}
\end{cases} \\
\text{虚数}(b\neq 0)\text{（}a=0\text{ の虚数を純虚数という）}
\end{cases}
$$

自然数の世界：加・乗が常に可能

整数の世界：加・減・乗が常に可能

有理数の世界：加・減・乗・除（0 で割ることを除く）が常に可能

　任意の 2 つの有理数の差を限りなく小さくとっても，その間に無数の有理数がある。

　これを有理数の稠密性という。

無理数の世界：有理数ならば分数で表せる。よって，分数で表せないなら有理数ではない。

　分数で表せない数を無理数という。

実数の世界：有理数と無理数をあわせて実数という。

　有理数と無理数により，数直線上の数の隙間がなくなる。

　これを実数の連続性という。

虚数の世界：実数ならば，負の実数の平方根は存在しないが，

　虚数の世界では，負の実数の平方根が存在する。

数（複素数）の世界：実数と虚数をまとめて数（複素数）という。

代数式の分類

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{単項式}\\ \text{多項式}\end{cases}\\ \text{分数式：分母が定数でない整式}\end{cases}\\ \text{無理式：根号の中に文字を含む式}\end{cases}$$

2 項展開，$\boldsymbol{x+a}$ についての展開の応用例題

$f(x)=x^n$ を $(x-a)^2$ で割った余りを求めよ。

解

$$\begin{aligned}x^n &= \{(x-a)+a\}^n\\ &= {}_nC_0(x-a)^n + {}_nC_1(x-a)^{n-1}\cdot a^1 + \cdots + {}_nC_{n-2}(x-a)^2\cdot a^{n-2} + {}_nC_{n-1}(x-a)\cdot a^{n-1} + {}_nC_na^n\\ &= (x-a)^2\left\{{}_nC_0(x-a)^{n-2} + {}_nC_1(x-a)^{n-3}\cdot a^1 + \cdots + {}_nC_{n-2}a^{n-2}\right\} + {}_nC_{n-1}(x-a)\cdot a^{n-1} + {}_nC_na^n\\ &= (x-a)^2\left\{{}_nC_0(x-a)^{n-2} + {}_nC_1(x-a)^{n-3}\cdot a^1 + \cdots + {}_nC_{n-2}a^{n-2}\right\} + na^{n-1}x-(n-1)a^n\end{aligned}$$

ゆえに，$na^{n-1}x-(n-1)a^n$

別解：微分の利用

$x^n=(x-a)^2h(x)+px+q$ ・・・①

とおく。

①の両辺を x について微分すると，

$nx^{n-1}=2(x-a)h(x)+(x-a)^2h'(x)+p$ ・・・②

①，②のそれぞれに $x=a$ を代入すると，

$a^n=pa+q$ ・・・③

$na^{n-1}=p$ ・・・④

③，④より，

$p=na^{n-1}$，$q=-(n-1)a^n$

ゆえに，$na^{n-1}x-(n-1)a^n$

3　因数分解／3 次以上

3　演習題

(3) 別解

$$
\begin{aligned}
(x+1)(y+1)(xy+1)+xy &= \{(xy+1)+x+y\}(xy+1)+xy \\
&= (xy+1)^2+(x+y)(xy+1)+xy \\
&= \{(xy+1)+x\}\{(xy+1)+y\} \\
&= (xy+x+1)(xy+y+1)
\end{aligned}
$$

4　因数分解／置き換え，複 2 次式，$x^3+y^3+z^3-3xyz$

(4)　公式を使わない場合

$$
\begin{aligned}
x^3-y^3-z^3-3xyz &= \{(x-y)^3+3xy(x-y)\}-z^3-3xyz \\
&= (x-y)^3+3xy\{(x-y)-z\}-z^3 \\
&= (x-y)^3-z^3+3xy(x-y-z)-z^3 \\
&= \{(x-y)-z\}\{(x-y)^2+(x-y)z+z^2\}+3xy(x-y-z) \\
&= (x-y-z)\{(x-y)^2+(x-y)z+z^2+3xy\} \\
&= (x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy-yz+zx)
\end{aligned}
$$

5 式の値／有理化，二重根号，根号のはずし方

5　演習題

（イ）別解

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2}{x+1-(x-1)} \\
&= \frac{x+1-2\sqrt{(x+1)(x-1)}+x-1}{2} \\
&= x-\sqrt{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{1+a^2}{2a}-\sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a}+1\right)\left(\frac{1+a^2}{2a}-1\right)} \\
&= \frac{1+a^2}{2a}-\frac{\sqrt{(1+a)^2(1-a)^2}}{2a} \\
&= \frac{1+a^2-(1+a)|1-a|}{2a}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore a\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)=\frac{1+a^2-(1+a)|1-a|}{2}
$$

よって，$0<a<1$ のとき a^2，$1\leq a$ のとき 1

7　式の値／1 文字消去，字数下げ

（イ）別解

$x-2=-\sqrt{3}$ より，$(x-2)^2=\left(-\sqrt{3}\right)^2$　$\therefore x^2-4x+1=0$

x^3-x^2-6x-1 を x^2-4x+1 で割ると，
$x^3-x^2-6x-1=\left(x^2-4x+1\right)(x+3)+5x-4$
$x=2-\sqrt{3}$ のとき $x^2-4x+1=0$ だから，

$x=2-\sqrt{3}$ のときの x^3-x^2-6x-1 の値は，$5\left(2-\sqrt{3}\right)-4=6-5\sqrt{3}$

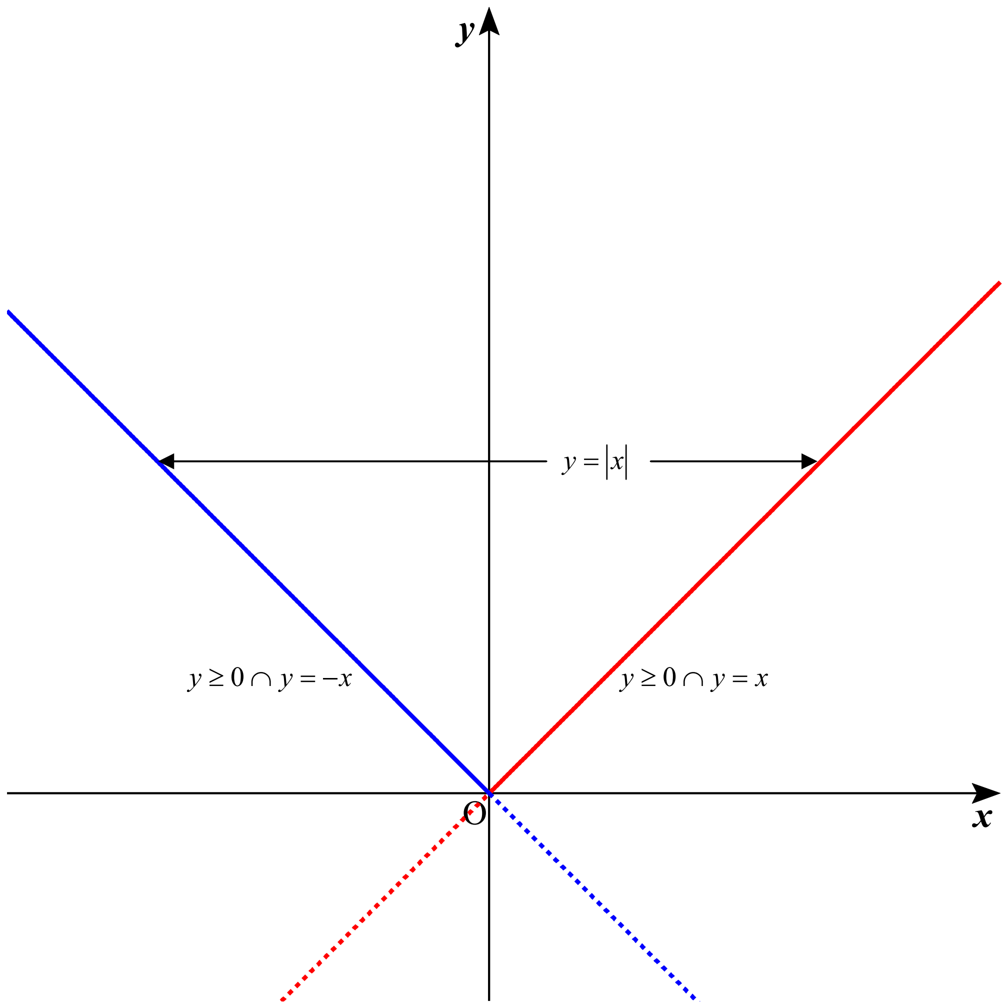
8　1 次方程式・不等式・絶対値つきを解くなど

絶対値のはずし方と必要十分条件

1.　$|y|=|x| \Leftrightarrow y=\pm x$

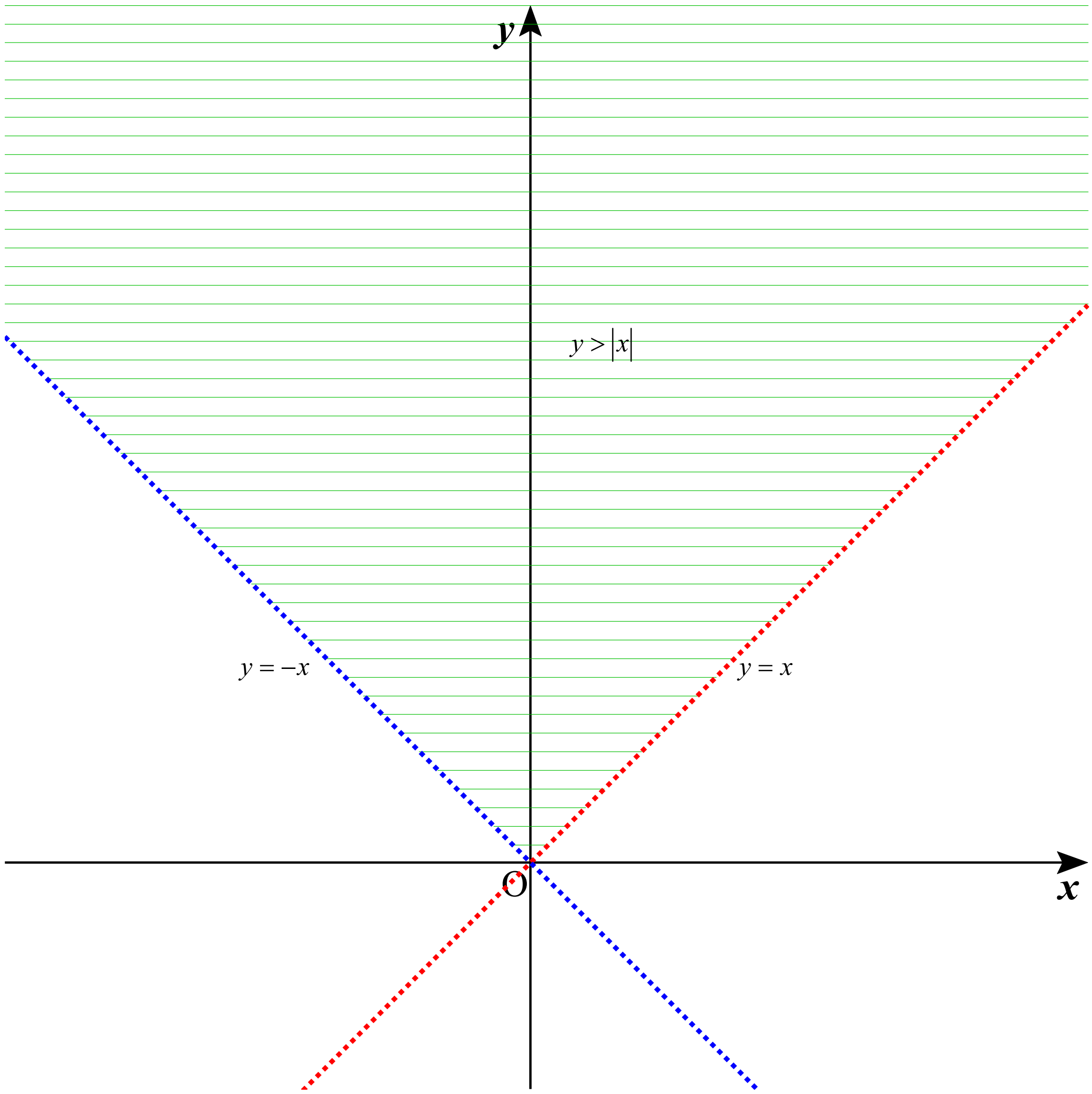
2. $y=|x| \Leftrightarrow y\geq 0$ かつ $y=\pm x$（あるいは，$x\geq 0$ のとき $y=x$ かつ $x\leq 0$ のとき $y=-x$）

解説図



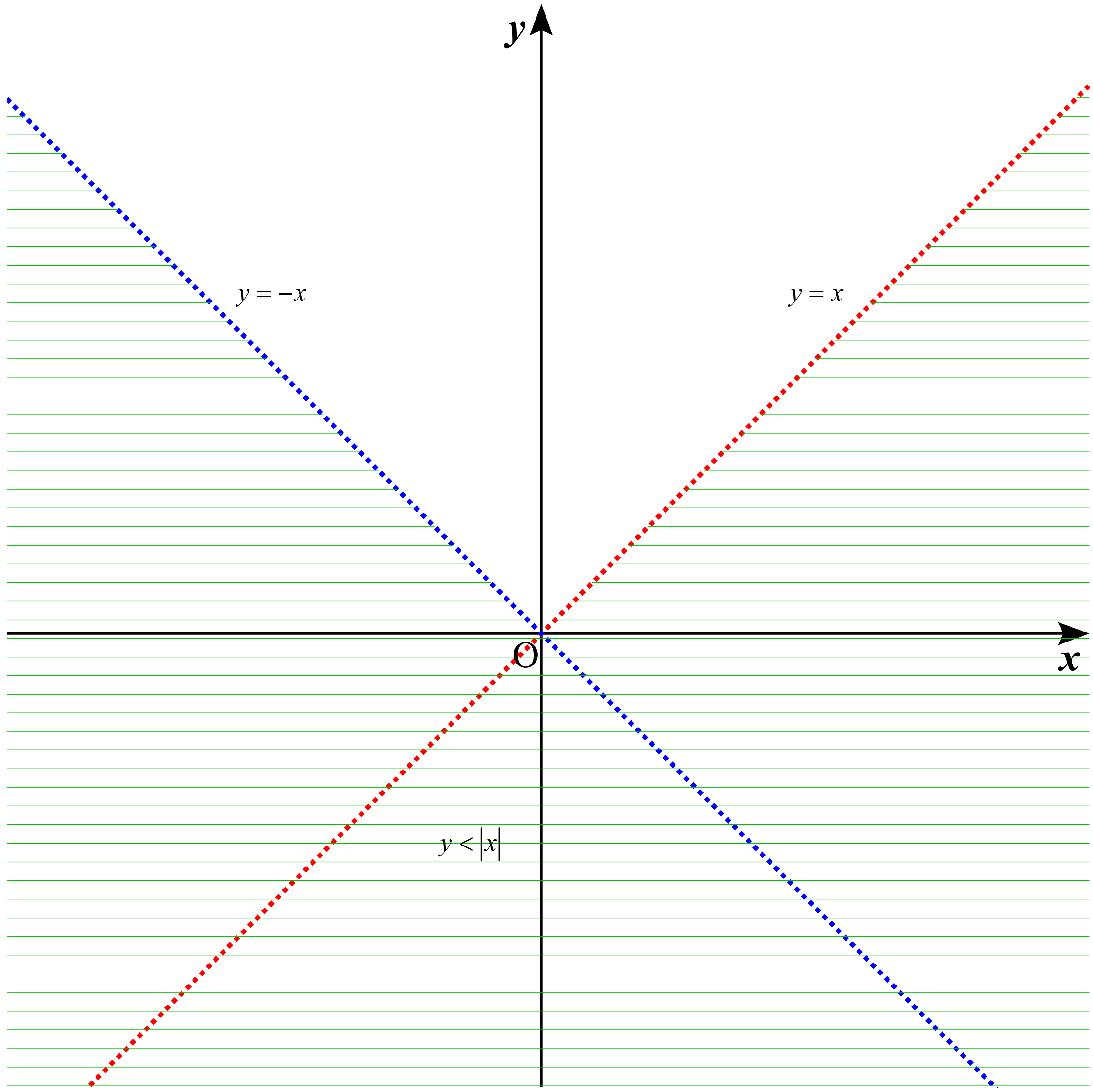
3.　$y>|x| \Leftrightarrow y>x \cap y>-x$ すなわち $-y<x<y$

解説図



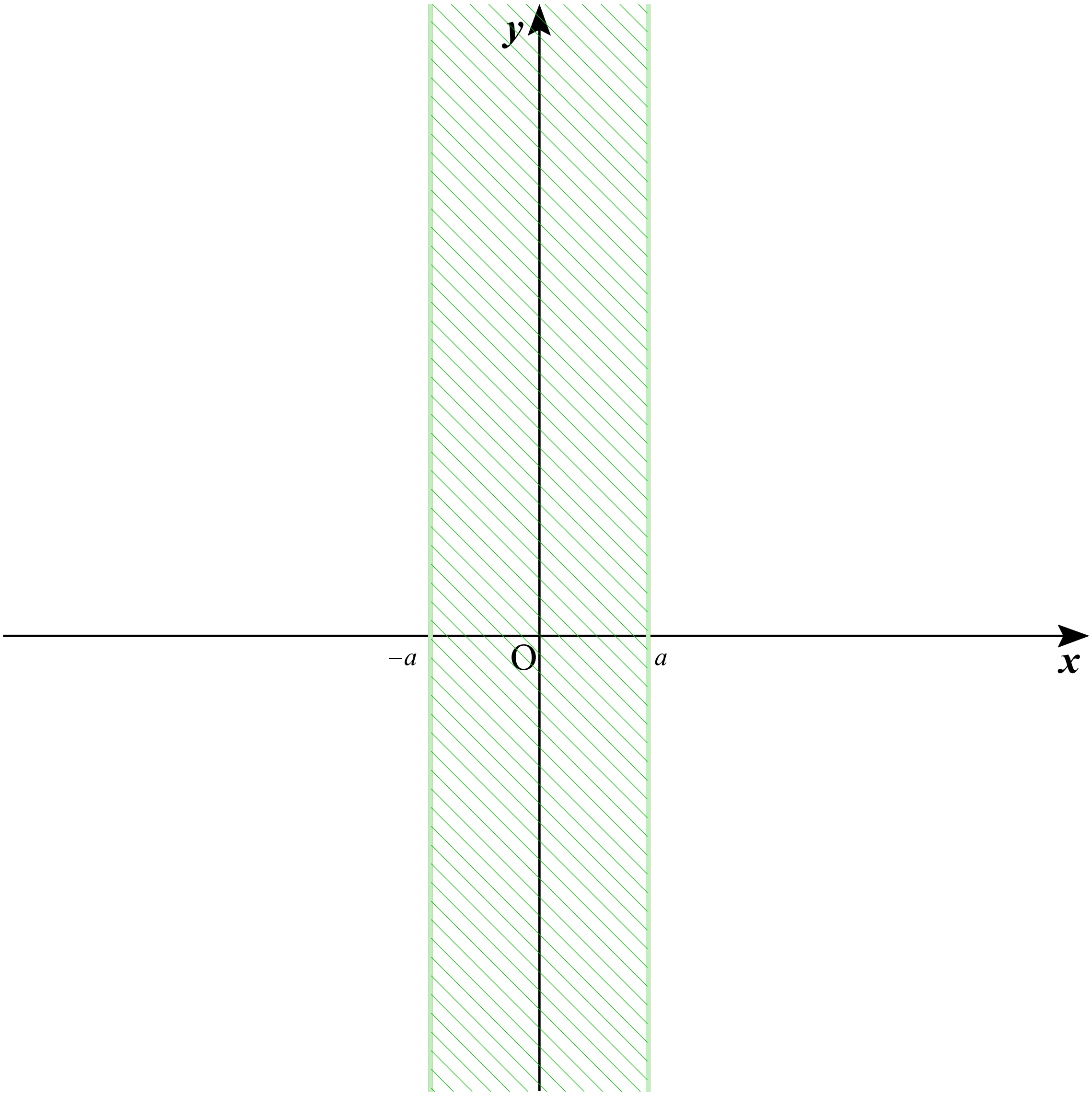
4.　$y<|x| \Leftrightarrow y<-x \cup y<x$

解説図



5.　$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad (\because 0 \leq |x| < a)$

解説図



6.　$|x| > a \Leftrightarrow a < 0$ のとき x は全実数，$a \geq 0$ のとき $x < -a \cup a < x$

9　連立 1 次方程式／連立方程式の解の存在条件

9　演習題

$\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ mx-y-3m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x=3m+1 \\ y=-2(x-1) \end{cases}$ より，

$\begin{cases} (m+2)x=3m+1 \\ y=-2(x-1) \end{cases}$ が $x>0$ かつ $y>0$ である解をもつ必要十分条件を求めればよい。

$y=-2(x-1)$ について，$y>0$ ならば $x<1$　・・・①

$(m+2)x=3m+1$ について，解 x が存在するためには $m\neq -2$

よって，$x>0$ ならば $0<x=\dfrac{3m+1}{m+2}$　・・・②

①，②より，$x>0$ かつ $y>0$ ならば，$0<\dfrac{3m+1}{m+2}<1$　$\therefore 0<(m+2)(3m+1)<(m+2)^2$

よって，$0<(m+2)(3m+1)$ かつ $(m+2)(3m+1)<(m+2)^2$ より，$-\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{1}{2}$

逆に $-\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{1}{2}$ ならば $\begin{cases} (m+2)x=3m+1 \\ y=-2(x-1) \end{cases}$ が $x>0$ かつ $y>0$ である解をもつ。

ゆえに，求める必要十分条件は，$-\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{1}{2}$

10　1 次不等式／解の存在条件，整数解の個数

（イ）解説

$\left|x-\dfrac{2}{7}\right|<a$ とは，絶対値の定義より，数直線上の $\dfrac{2}{7}$ と x の距離が a より小さいということ。

10　演習題

（イ）

別解（略解）

$\begin{cases} ax<3a(a-3) \\ (a-3)x\geq a(a-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x-3a+9)<0 \\ (a-3)(x-a)\geq 0 \end{cases}$ より，

$a<0$ のとき

$x-3a+9>0$ かつ $x-a\leq 0$ より，$3a-9<x\leq a$

よって，$2<a-(3a-9)\leq 3$　$\therefore 3\leq a<3.5$　$\therefore a=3$

これは $a<0$ に反するので不適

$a=0$ のとき

$a(x-3a+9)<0$ において $0(x+9)<0$ を満たす x が存在しない。

よって，不適

$0<a<3$ のとき

$x-3a+9<0$ かつ $x-a\leq 0$ より， $x<3a-9$

よって，解が無数に存在するから不適

$a=3$ のとき

$3x<0$ かつ $0(x-3)\geq 0$ より， $x<0$

よって，解が無数に存在するから不適

$3<a$ のとき

$x-3a+9<0$ かつ $x-a\geq 0$ より， $a\leq x<3a-9$

よって，整数解が 3 個存在するためには， $2<(3a-9)-a\leq 3$ $\therefore 5.5<a\leq 6$

a は整数だから， $a=6$

以上より，

条件を満たす整数 a の値は 6 ・・・（答）

11 絶対値つき関数／折れ線（具体的）

こうするとわかりやすい。

（ア）

x		-1		1		2	
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$		$x+1$		$x+1$		$x+1$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$		$-x+1$		$x-1$		$x-1$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$-x+2$		$-x+2$		$x-2$
$f(x)$	$-3x+2$		$-x+4$		$x+2$		$3x-2$